Institut la centrale Electrostatique :

Flux du champ electrostatique - Theoreme de Gauss

1/ Angle solide

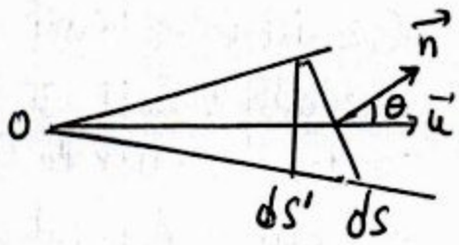
a/ Définition: l'angle solide elementaire $d\Omega$ delimité par un cône coupant un element de surface dS située à une distance r de son sommet O vaut $d\Omega = \frac{dS}{r^2}$ unité stéradian (sr)

- En coordonnées spheriques, la surface elementaire à r constant vaut $dS = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$

l'angle solide elementaire est $d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$

Ainsi, l'angle solide delimité par un cône de revolution, d'angle au sommet α vaut $\Omega = \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sin\theta \, d\theta = 2\pi(1-\cos\alpha)$

- l'espace entier correspond à un angle solide de 4π $(\alpha = \pi)$
- Generalement, le cône peut intercepter une surface quelconque dont la normale $\vec{n}$ fait un angle θ avec la generatrice du vecteur directeur $\vec{u}$ l'angle solide elementaire est alors définie par:



$$d\Omega = \frac{d\vec{S}\cdot\vec{u}}{r^2} = \frac{dS\cdot\vec{n}\cdot\vec{u}}{r^2} = \frac{dS\cos\theta}{r^2} = \frac{dS'}{r^2}$$

2/ Theoreme de Gauss

a/ Flux du champ d'une charge ponctuelle

Une charge ponctuelle q située en un point O de l'espace le flux du champ electrostatique $\vec{E}$ créé par cette charge à travers une surface elementaire quelconque orientée est par definition: $d\phi = \vec{E}\cdot d\vec{S} = \vec{E}\cdot\vec{n}\cdot dS$

$\vec{n}$ vecteur unitaire normal à la surface dS vers l'exterieur

Ainsi: $d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}\cdot\vec{n}}{r^2}dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$

Remarque: le flux depend directement de l'angle solide sous lequel est vue la surface et non de sa distance r

ETUDUP .com

b/ Theoreme de Gauss :

Le flux du champ electrique à travers une surface fermee orientée quelconque est egale, dans le vide, à $\frac{1}{\varepsilon_0}$ fois la charge electrique contenue à l'interieur de cette surface

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{interieur}}{\varepsilon_0}$$

3/ Exemple d'applications

Le theoreme de Gauss fournit une methode très utile pour calculer le champ $\vec{E}$ lorsque celui-ci possède des propriétés de symétrie particulière. Celles-ci doivent en effet permettre de calculer facilement le flux Φ. Comme le Theoreme de Gauss est valable pour une surface quelconque, il nous suffit de trouver une surface S adaptée, c'est à dire respectant les propriétés de symetrie du champ appelée "surface de Gauss"

Ainsi: Pour appliquer le theoreme de Gauss: il faut suivre 3 étapes:

1°étape : Determination de la composante de $\vec{E}$ (symétries possible ...)

2°étape : choix de la surface de Gauss

3°étape : Application du theoreme de Gauss

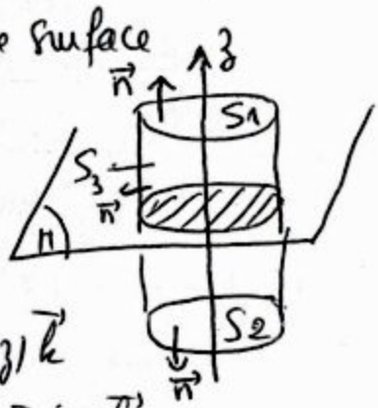
Exemple 1: Champ electrostatique créé par 1 plan infini uniformement chargé

Soit π un plan infini de charge uniforme σ par unité de surface

Tous les plans perpendiculaire à π sont des plans de symétrie

à π donc $\vec{E}$ appartient aux plans de symétrie

il est donc perpendiculaire à π



Si π est engendré par le vecteurs $(\vec{i}, \vec{j})$ alors $\vec{E} = E_z(x,y,z)\vec{k}$

l'invariance par translation selon x et y nous fournit $\vec{E} = E_z(z)\vec{k}$

le plan π est lui même un plan de symétrie donc $E(z)$ est impaire

Etant donné ces propriété de symétrie, la surface de Gauss la plus adaptée est un cylindre de sections perpendiculaire à π et situés à des hauteurs symétrique alors $\Phi = \oiint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{E}\, d\vec{S} + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S}$

$= E(z) \cdot S - E(-z) \cdot S + 0 = 2ES$

or $\Phi = \frac{\Phi_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iint_S \sigma\, ds = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$ d'où $2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$

Flux du champ electrique - Theoreme de Gauss (suite)

Exemple 2 : Champ créé par une boule uniformement chargée

On considere une boule (sphere pleine) de centre O et de rayon R, chargée avec une distribution volumique de charge ρ.

la distribution possede une symetrie spherique

alors le champ electrostatique qui en resulte aura la même symetrie donc $\vec{E} = E(r)\,\vec{u_r}$

la surface de Gauss adaptée est simplement une sphere de rayon r et le theoreme de Gauss nous donne :

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}.d\vec{S} = \oiint_S E(r)\,dS = E(r)\oiint_S dS = E(r)\times 4\pi r^2$$

or $\Phi = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\,dV = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\iiint_V dV$

Si $r < R$ alors $\Phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$ et $E = \frac{\Phi}{4\pi r^2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$

Si $r > R$ alors $\Phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi R^3$ et $E = \frac{\Phi}{4\pi r^2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\cdot\frac{R^3}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

où Q est la charge totale portée par la boule

4/ lignes de champ

Définition : Une ligne de champ d'un champ de vecteur quelconque est une courbe C definie dans l'espace telle qu'en chacun de ses points le vecteur y soit tangent

Soit $d\vec{\ell}$ un deplacement elementaire de $\vec{E}$

$\vec{E}$ est tangent à (C) $\Leftrightarrow$ $\vec{E}$ et $d\vec{\ell}$ sont colineaux $\Leftrightarrow \vec{E}\wedge d\vec{\ell} = \vec{0}$

En coordonnées cartesienne : $d\vec{\ell} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$; $\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$

alors $\vec{E}\wedge d\vec{\ell} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$

En coordonnée cylindrique : $d\vec{\ell} = de\,\vec{u_e} + e\,d\theta\,\vec{u_\theta} + dz.\vec{u_z}$; $\vec{E} = E_e\vec{u_e} + E_\theta\vec{u_\theta} + E_z\vec{u_z}$

alors $\vec{E}\wedge d\vec{\ell} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{de}{E_\rho} = \frac{e\,d\theta}{E_\theta} = \frac{dz}{E_z}$

En coordonnée spherique : $d\vec{\ell} = dr\,\vec{u_r} + r\,d\theta\,\vec{u_\theta} + r\sin\theta\,d\varphi\,\vec{u_\varphi}$

alors $\vec{E}\wedge d\vec{\ell} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{dr}{E_r} = \frac{r\,d\theta}{E_\theta} = \frac{r\sin\theta\,d\varphi}{E_\varphi}$

ETUDUP .com

5/ Circulation du champ électrostatique

Soit une fonction scalaire $V(M)$ définie en tout point M de l'espace. Une variation dV de ce champ lorsqu'on passe d'un point M à un point M' infiniment proche est donné par la différentielle totale :

$$dV(M) = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = \overrightarrow{grad}\,V \cdot d\overrightarrow{OM}$$

a/ Potentiel électrostatique

Définition : Le potentiel électrostatique V est relié au champ électrique $\vec{E}$ par la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$

Ainsi $dV(M) = -\vec{E} \cdot d\overrightarrow{OM} = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$

Remarque : Les ligne de champ électrostatique sont perpendiculaires aux courbes équipotentielles ($V = Cte \Rightarrow dV = 0 \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{\ell}$)

b/ Circulation du champ :

Définition : La circulation du champ électrostatique $\vec{E}$ le long d'une courbe allant de A vers B : $C_A^B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_A^B dV = V(A) - V(B)$

Remarques : La circulation de $\vec{E}$ le long d'1 courbe fermée est nulle $C_A^B = 0$

La circulation est conservative : elle ne dépend pas du chemin suivi

c/ Potentiel créé par une charge ponctuelle

$$dV(M) = -\vec{E} \cdot d\overrightarrow{OM} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u} \cdot d\vec{r}}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} \Rightarrow V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + V_0$$

Remarque : $V_0 = 0$ (on considère que le potentiel est nul à l'infini)

d/ Potentiel créé par un ensemble de charges : $(q_i)_{1 \le i \le n}$

$$V(M) = \sum_{i=1}^{n} \cdot = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i}$$

r_i : distance de q_i à M

e/ Potentiel créé par un ensemble continue de charges

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda\, d\ell}{r}$$ pour la distribution linéique de densité λ

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{\sigma\, dS}{r}$$ ——— surfacique ——— σ

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho\, dV}{r}$$ ——— volumique ——— ρ

ETUDUP .com

et encore plus..